

3. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

3.4. Ejercicios complementarios

1. Calcula la integral de $f(x, y) = \sqrt{|y - x|}$ sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$.
2. Calcula el volumen de la región ubicada sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y bajo la gráfica de $z = x^2 + y$.
3. Siendo $R = [0, 1] \times [0, 1]$, demuestra que: $\frac{1 - \cos 1}{2} \leq \iint_R \frac{\sin x}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1$.
4. Halla la integral de las siguientes funciones sobre el recinto que en cada caso se indica:
 - (a) $f(x, y) = (xy)^2$, sobre $S = \{(x, y) : y > 0, xy < 1, (x - y)(x - 2y) < 0\}$.
 - (b) $f(x, y) = y^2 \sqrt{x}$, sobre $S = \{(x, y) : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$.
 - (c) $f(x, y) = y(x^2 + y^2)^{-3/2}$, sobre $S = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Siendo S el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$, demuestra que: $\frac{1}{6} \leq \iint_S \frac{dx dy}{y - x + 3} \leq \frac{1}{4}$.
6. Calcula el valor de la siguiente integral iterada, encuentra la integral doble (recinto y función) de la que proviene, intercambia el orden de integración (calculando su valor) y comprueba si se obtiene el mismo resultado.

$$\int_0^1 dy \int_1^{2-y} (x + y)^2 dx$$

7. Demuestra que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces:

$$2 \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y) dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$$

8. Calcula, mediante integrales triples, el volumen de una esfera de radio r .

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$.
2. $\frac{11}{6}$.
3. Demuestra que $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{\sin x}{1 + (xy)^4} \leq 1$, sobre el dominio de integración, y utiliza las propiedades de la integral.
4. (a) $\frac{\ln 2}{6}$; (b) $\frac{78800}{693} 5^{3/4}$; (c) $2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$.
5. Demuestra que $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y - x + 3} \leq \frac{1}{2}$, sobre el dominio de integración, y utiliza las propiedades de la integral.
6. $\frac{17}{12}$.
7. Observa que el cuadrado de $\int_a^b f(x) dx$ coincide con la integral sobre $[a, b]^2$ de $F(x, y) = f(x)f(y)$ que es una función simétrica respecto de la diagonal del cuadrado.
8. Calcula la integral triple de $f(x, y, z) = 1$ sobre la esfera de radio r centrada en el origen.